Date : / / Subject:

ملاحظة:

ليس من الضروري أن تشكل أي أسرة من المجموعات قاعدة لطبولوجيا ما على X.

مثال:

لو أخذنا $A=\{a,b\}$ و $B=\{b,c\}$ و $X=\{a,b,c\}$

فإن الأسرة $H=\{X,\emptyset,A,B\}$

لا تشكل قاعدة لأي طبولوجيا على X لأن شرط التقاطع غير محقق

لأنه (بطريقة نقض الفرض)

لنفرض جدلاً أن H قاعدة لطبولوجيا ما على $X \Leftarrow \tau \subseteq H$ من

جهة ثانية إذا أخذنا أي عنصر من τ يجب أن يساوي اجتماع لعناصر

[redacted] من H ونلاحظ أن أي اجتماع لعناصر من H هو عنصر من H

وهذا يعني $H \subset \tau$ (τ تحوي H) $\Leftarrow$ ومنه يكون

$\tau=H$ هذا يعني أن H طبولوجيا وهذا غير صحيح وهذا تناقض

لأنه $A\cap B \not\subset H$

●٣٤

مبرهنة:

لتكن X مجموعة ما، B أسرة من [redacted] مجموعاتها الجزئية تحقق الشرطين التاليان

① X يساوي اجتماعاً لعناصر B

② من أجل أي $u,v \in B$ وأي عنصر $x\in u\cap v$ توجد مجموعة ما w من B بحيث: $x\in w \subseteq u\cap v$

إن الأسرة τ المؤلفة من المجموعات التي كل منها يساوي اجتماع لعناصر من B تشكل طبولوجيا على X وتتميز بأنها الطبولوجيا الوحيدة التي قاعدتها B

البرهان

① $A\cap B = \bigcup_{x\in A\cap B} w_x$

② إن B يشكل قاعدة لـ τ من طريقة بنائها

Date : / / Subject:

القاعدة الجزئية :

(X, τ) فضاء طبولوجي S أسرة من المجموعات المفتوحة $(S \subseteq \tau)$ نسمي الأسرة S قاعدة جزئية للطبولوجيا τ اذا كانت أسرة التقاطعات المنتهية لعناصر من S تشكل قاعدة في طبولوجيا

مثال 1 :

لنأخذ الفضاء المتقطع $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \ldots, X\}$ و $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

ليست قاعدة ⟸ $S = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

ليست قاعدة جزئية

مثال 2 :

ليكن R فضاء طبولوجي حقيقي أسرة المجالات المفتوحة $\beta = \{\,]a,b[\,; a, b \in R\}$

$x < b$ ، $x > a$ ، $S = [\ ]\,-\infty, b[\ ,\ ]a, +\infty[\ ]$

هذا مثال عن قاعدة جزئية

المجموعات المغلقة :

تعريف : لتكن F مجموعة جزئية من الفضاء الطبولوجي τ نسمي المجموعة F مجموعة مغلقة اذا كان متممها مفتوحة $X \setminus X/F = F$

المجموعة المفتوحة ⟸ متممها مغلقة

المجموعة المغلقة ⟸ متممها مفتوحة

مبرهنة :

ان المجموعات المغلقة في الفضاء الطبولوجي تحقق الخواص التالية

1- اي تقاطع لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة

2- اجتماع عدد منتهي من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

3- $\emptyset$ ، X مجموعتان مغلقتان

البرهان :

ينتج من التعاريف وقوانين دومورغان

Sabbagh

منه النقاط مفتوحة اي $\{X \setminus \cap A_x\}$ إذا المجموعة مغلقة $\cup \{X \setminus A_x\}$

داخلية مجموعة:

ليكن X فضاء طبولوجي (X, τ) و A مجموعة من X أي $A \subseteq X$
و x نقطة من A أي $x \in A$ تسمى x النقطة داخلية في A إذا
وجدت مجموعة مفتوحة $u \in \tau$ بحيث $x \in u \subseteq A$

ان مجموعة نقاط الداخلية لمجموعة A تسمى داخلية A وسوف نرمز لها
بالرمز A°
واضح من التعريف أن $A^\circ \subseteq A$ وإذا كان $A \subseteq B$ فإن $A^\circ \subseteq B^\circ$

مبرهنة:

لتكن A مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي (X, τ) عندئذ
① A° تساوي اجتماع جميع المجموعات المفتوحة المحتواة في A
② A° هي أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A
③ تكون A مجموعة مفتوحة فقط وإذا كان $A = A^\circ$

مبرهنة:

نفرض A، B مجموعتان من الفضاء (X, τ) عندئذ يكون
① $X^\circ = X$ و $\emptyset^\circ = \emptyset$
② $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
③ $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

ملاحظة:

① $X, \emptyset$ مجموعتان مغلقتان ومفتوحتان في آن واحد في أي فضاء طبولوجي.
② كون المجموعة مفتوحة لا يعني عكسها انها مغلقة
③ يوجد من المجموعات المفتوحة بقدر ما يوجد من المجموعات المغلقة

مثال:

في الفضاء الطبولوجي المتقطع (قوية) أي أن كل المجموعات مفتوحة
ما هي المجموعات المغلقة في هذا الفضاء؟
هي كل المجموعات مفتوحة هذا يعني ان كل المجموعات مغلقة

Date : / / Subject:

ت د:
ليكن A فضاء (A, τ) التي تحوي ① مع ϕ هي المجموعات المفتوحة
اي مجموعة تحوي ١ هي مجموعات مفتوحة مع ϕ
والمجموعات المغلقة اي مجموعة لا تحوي ①

المشتقة و اللصاقة:

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء (X, τ) و X من الفضاء $x \in X$ تسمى النقطة x نقطة تراكم للمجموعة A اذا كان اي جوار للنقطة x يتقاطع معها بنقاط مختلفة عن x نفسها
اي اذا كان $\forall U \in N(x) ; U \cap A \setminus \{x\} \neq \phi$
ان مجموعة نقاط التراكم للمجموعة A تسمى مشتقة A ونرمز لها بالرمز A'

تعريف:
لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الطبولوجي (X, τ) تسمى النقطة x نقطة لاصقة بالمجموعة A اذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A و $\forall U \in N(x) : U \cap A \neq \phi$
ان مجموعة النقاط اللاصقة بالمجموعة A تسمى لصاقة A ونرمز لها $(\bar{A})$

نستنتج: أن كل نقطة تراكم هي نقطة لاصقة.
اي ان اللصاقة تحوي ~~المشتقة~~ المشتقة اي $A' \subseteq \bar{A}$ $A \subseteq \bar{A}$
كما ان أي نقطة تنتمي لمجموعة هي بالتأكيد لاصقة لها

مبرهنة
في اي فضاء طبولوجي تتحقق العلاقة التالية $\bar{A} = A \cup A'$
مع ملاحظة أن النقطة اللاصقة التي ليست نقطة تراكم تكون نقطة منعزلة
كما ان النقطة اللاصقة لـ المجموعة والتي لا تنتمي اليها تكون نقطة تراكم

مبرهنة:
لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء الطبولوجي (X, τ)
① $\bar{A}$ تساوي جميع المجموعات المغلقة التي تحوي A

Date : / / Subject:

١) $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A

٢) A مغلقة فقط إذا كانت $A = \bar{A}$

برهنة :

١) $\bar{X} = X$ ، $\bar{\phi} = \phi$

٢) $\overline{(\bar{A})} = (\bar{A})$

٣) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

٤) $A \subseteq B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

تعريف : تكون A مغلقة فقط إذا كان $A' \subseteq A$